

Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)

Heefelt, Mogens Brun

Publication date:
2001

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Citation for published version (APA):
Heefelt, M. B. (2001). *Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)*. Roskilde Universitet. Tekster fra IMFUFA Nr. 398 <http://milne.ruc.dk/lmfufaTekster/pdf/398.pdf>

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain.
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact rucforsk@kb.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

TEKST NR 398

2001

Kursusmateriale til
"Lineære strukturer fra algebra og analyse"
(E1)

Mogens Brun Heefelt

PRIS: 36.25
KURSUSMATERIALE



9 789673 011766
31.05.2001

TEKSTER fra

IMFUFA **ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

*Denne tekst er et kursusmateriale til kurset "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1), og den indgår som supplement til lærebogen - **Friedberg, Insel and Spence**. "Linear Algebra", 3rd Ed., (1997).*

Denne tekst erstatter lærebogens afsnit om nulrum for lineære differential-operatorer samt supplerer lærebogens afsnit om jordans normalform og om løsning af et system af første ordens lineære differentialligninger.

Endvidere indeholder teksten en omfattende opgavesamling, hvor de sidste elleve sider er ældre eksamenssæt.

Indholdsfortegnelse.

<i>Afsnit A: Invariante underrum</i>	<i>s 1</i>
<i>Afsnit B: Nulrum for lineære differentialoperatorer</i>	<i>s 4</i>
<i>Afsnit C: Diagonalisering af matricer og jordans normalform</i>	<i>s 9</i>
<i>Afsnit D: Løsning af et system af første ordens lineære differentialligninger</i>	<i>s 17</i>
<i>Afsnit E: Supplerende opgaver</i>	<i>s 29</i>

Afsnit A: Invariante underrum

I dette afsnit vil vi vise nogle sætninger om invariante underrum, som vil blive anvendt i de to følgende afsnit.

Lad os betragte et vektorrum V over \mathbb{C} , og lad $A: V \rightarrow V$ være en lineær operator på V . Er videre W et underrum af V , da kaldes W **et A-invariant underrum**, hvis

$$Aw \in W \text{ for alle } w \in W$$

dvs, at

$$A(W) \subseteq W.$$

Eksempel A1. Er v en egenvektor for operatoren A svarende til egenværdien λ vil $W = \text{span}\{v\}$ være et A -invariant underrum, da det for alle $w \in W$ gælder, at $Aw = \lambda w \in W$. #

Er p et polynomium af n -te grad med komplekse koefficienter

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

kan man ud fra den lineære operator A definere en ny lineære operator

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_n A^n.$$

hvor I er den identiske operator. Ved simpel udregning ses da, at operatorerne A og $p(A)$ vil kommutere, dvs

$$Ap(A) = p(A)A.$$

Er q tilsvarende et polynomium af k -te grad med komplekse koefficienter, defineres på samme måde operatoren

$$q(A) = b_0 I + b_1 A + \dots + b_k A^k.$$

Man får igen ved simple udregninger, at $p(A)$ og $q(A)$ vil kommutere

$$q(A)p(A) = p(A)q(A)$$

da $A^i A^j = A^j A^i$.

Eksempel A2. Er p et polynomium af grad n , og er $W = N(p(A))$ - nulrummet for $p(A)$ - skal vi se, at W er A -invariant.

Er $w \in W$, dvs at $p(A)w = 0$, kan vi slutte, at

$$p(A)(Aw) = p(A)Aw = A(p(A)w) = 0,$$

hvilket viser, at $Aw \in W$. #

Sætning A3. Lad nu p være et polynomium af grad n , og lad der være givet faktoropløsningen $p(t) = p_1(t)p_2(t)$, hvor p_1 og p_2 begge er af grad ≥ 1 og med største fælles divisor 1. Lad V være nulrummet for operatoren $p(A) - N(p(A))$, da skal vi vise, at

$$V = W_1 \oplus W_2,$$

dvs V er en direkte sum af $W_1 = N(p_1(A))$ og $W_2 = N(p_2(A))$.

Da p_1 og p_2 har største fælles divisor 1, findes polynomier q_1 og q_2 , således at der gælder ligningen

$$q_1(t)p_1(t) + q_2(t)p_2(t) = 1,$$

og derfor kan vi også definere operatorligningen

$$(*) \quad q_1(A)p_1(A) + q_2(A)p_2(A) = I.$$

Vi lader nu $(*)$ virke på et vilkårligt $v \in V$, da er

$$v = q_1(A)p_1(A)v + q_2(A)p_2(A)v.$$

Her skal vi vise, at første led på højre side i ligningen tilhører W_2 , idet

$$p_2(A)[q_1(A)p_1(A)v] = q_1(A)[p_2(A)p_1(A)]v = q_1(A)p(A)v = 0,$$

da $v \in N(p(A))$. Tilsvarende kan man vise, at det andet led tilhører W_1 , og dermed er ethvert element i V sum af et element fra W_1 og et element fra W_2 .

Vi mangler nu at vise, at summen er direkte, dvs at

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}.$$

Lad os derfor antage, at $w \in W_1 \cap W_2$, da vil

$$p_1(A)w = 0 \quad \text{og} \quad p_2(A)w = 0$$

(w ligger jo i både W_1 og W_2). Lader vi nu $(*)$ virke på w , fås at

$$w = q_1(A)p_1(A)w + q_2(A)p_2(A)w = 0 + 0 = 0$$

og dermed er summen af W_1 og W_2 direkte. #

Denne sætning kan umiddelbart generaliseres til:

Sætning A4. Lad p være et polynomium af grad n , og lad der være givet faktoropløsningen $p(t) = p_1(t) \cdots p_k(t)$, hvor p_1, \dots, p_k alle er af grad ≥ 1 og med største fælles divisor 1. Da er

$$N(p(A)) = N(p_1(A)) \oplus \dots \oplus N(p_k(A)).$$

Dette vises ved induktion. For $k = 2$ er det vist i sætning A3. Lad os nu antage, at sætningen er korrekt for $k = j$, dvs at

$$N(q(A)) = N(p_1(A)) \oplus \dots \oplus N(p_j(A)),$$

når $q(t) = p_1(t) \cdot \dots \cdot p_j(t)$, og polynomierne har største fælles divisor 1. Vi betragter nu

$$p(t) = p_1(t) \cdot \dots \cdot p_j(t) \cdot p_{j+1}(t)$$

hvor polynomierne har største fælles divisor 1. Da nu produktet af de første j af polynomierne, dvs

$$q(t) = p_1(t) \cdot \dots \cdot p_j(t)$$

opfylder sætningen, vil

$$N(q(A)) = N(p_1(A)) \oplus \dots \oplus N(p_j(A)).$$

Samtidig er $p(t) = q(t) \cdot p_{j+1}(t)$,

hvor q og p_{j+1} har største fælles divisor 1, og ifølge sætning A3 bliver

$$N(p(A)) = N(q(A)) \oplus N(p_{j+1}(A)).$$

Med $N(q(A))$ indsat bliver derfor

$$N(p(A)) = N(p_1(A)) \oplus \dots \oplus N(p_j(A)) \oplus N(p_{j+1}(A)).$$

Hermed er sætningen bevist. #

En simpel konsekvens af denne sætning bliver nu:

Sætning A5. Lad polynomiet p have følgende faktoropløsning

$$p(t) = (t - a_1)^{m_1} (t - a_2)^{m_2} \dots (t - a_k)^{m_k},$$

hvor alle a_i -er er forskellige. Da vil $N(p(A))$ være direkte sum af underrummene U_1, U_2, \dots, U_k , hvor

$$U_i = N((A - a_i I)^{m_i}).$$

Da polynomierne $p_i(t) = (t - a_i)^{m_i}$ og $p_j(t) = (t - a_j)^{m_j}$ for $i \neq j$ vil have største fælles divisor 1, følger sætningen umiddelbart af sætning A4. #

Afsnit B: Nulrum for lineære differentialoperatorer

I dette afsnit skal vi arbejde på at bestemme en basis for nulrummet til en lineær differentialoperator af n -te orden givet ved

$$L = D^n + b_{n-1}D^{n-1} + \dots + b_1D + b_0D^0$$

hvor alle b_i er reelle konstanter og hvor D^0 er den identiske operator.

I denne sammenhæng vil vi gå ud fra, at differentialoperatoren D afbilder vektorrummet $C^\infty(\mathbb{R})$ - rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner - ind i sig selv. Undervejs vil det dog være hensigtsmæssigt at udvide betragtningerne til rummet $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ - rummet af alle komplekse, vilkårligt ofte differentiable funktioner af en reel variabel, dvs funktioner

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

hvor $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Er der givet polynomiet

$$p(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_1t + b_0,$$

kan vi direkte ud fra differentialoperatoren D definere differentialoperatoren $L = p(D)$.

Man skal iøvrigt være opmærksom på, at spørgsmålet om at finde nulrummet for $p(D)$ netop er det samme som at finde alle funktioner, der løser den n -te ordens lineære differentialligning

$$(D^n + b_{n-1}D^{n-1} + \dots + b_1D + b_0D^0)f(t) = 0.$$

Polynomiet p vil - såfremt t varierer over de komplekse tal - have en faktoropløsning i førstegradspolynomier som fx

$$p(t) = (t - a_1)^{m_1}(t - a_2)^{m_2}\dots(t - a_k)^{m_k},$$

hvor nogle a_i -er kan være komplekse, men således at de parvist er komplekst konjugerede.

Af sætning A5 kan vi nu slutte, at en basis for $N(p(D))$ er fundet, når man har fundet en basis for hvert af nulrummene

$$U_i = N((D - a_iD^0)^{m_i}).$$

Til dette formål får vi brug for følgende sætning:

Sætning B1. $(D - aD^0)^m f(t) = e^{at} D^m (e^{-at} f(t))$

Sætningen vises ved induktion efter m . For $m = 1$ får man

$$\begin{aligned} e^{at} D(e^{-at} f(t)) &= e^{at} [-ae^{-at} f(t) + e^{-at} f'(t)] \\ &= f'(t) - af(t) = (D - aD^0) f(t). \end{aligned}$$

Antages sætningen nu korrekt for $m = k$, skal man vise, at den også gælder for $m = k + 1$. Det antages altså, at

$$(D - aD^0)^k f(t) = e^{at} D^k (e^{-at} f(t)),$$

som vi skal bruge på formen

$$e^{-at} (D - aD^0)^k f(t) = D^k (e^{-at} f(t)).$$

Da er

$$\begin{aligned} e^{at} D^{k+1} (e^{-at} f(t)) &= e^{at} D [D^k (e^{-at} f(t))] = \\ e^{at} D [e^{-at} (D - aD^0)^k f(t)] &= \\ e^{at} [-ae^{-at} (D - aD^0)^k f(t) + e^{-at} D (D - aD^0)^k f(t)] &= \\ (D - aD^0) (D - aD^0)^k f(t) &= (D - aD^0)^{k+1} f(t). \quad \# \end{aligned}$$

Vi kan af denne sætning se, at man fastlægger nulrummet for operatoren $(D - aD^0)^m$, ved at finde de funktioner f , som opfylder

$$(D - aD^0)^m f(t) = 0 \quad \text{eller} \quad D^m (e^{-at} f(t)) = 0.$$

Funktioner, der opfylder $D^m g(t) = 0$, er alle polynomier af grad højst $m - 1$, dvs

$$e^{-at} f(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1}$$

hvor alle c_i kan vælges frit. Derfor er

$$f(t) = (c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1}) e^{at}$$

hvilket betyder at nulrummet bliver

$$N((D - aD^0)^m) = \text{span}\{e^{at}, te^{at}, \dots, t^{m-1} e^{at}\}.$$

Eksempel B2. Med $L = D^2 + 4D + 3D^0$ bliver det tilhørende anden-gradspolynomium $p(t) = t^2 + 4t + 3 = (t + 1)(t + 3)$, og derfor er nulrummet $N(L) = \text{span}\{e^{-t}, e^{-3t}\}$.

Eksempel B3. Med $L = D^2 + 4D + 4D^0$ bliver det tilhørende anden-gradspolynomium $p(t) = t^2 + 4t + 4 = (t + 2)^2$, og derfor er nulrummet $N(L) = \text{span}\{e^{-2t}, te^{-2t}\}$.

Eksempel B4: Med $L = D^4 - 2D^2 + D^0$ bliver det tilhørende fjerdegradspolynomium $p(t) = t^4 - 2t^2 + 1 = (t + 1)^2(t - 1)^2$, og derfor er nulrummet $N(L) = \text{span}\{e^{-t}, te^{-t}, e^t, te^t\}$.

De nævnte eksempler har kun behandlet den situation, hvor faktoropløsningen bliver reel, men vi tog udgangspunkt i den situation, at faktoropløsningen også kunne være kompleks.

Fx vil andengradspolynomiet $p(t) = t^2 + 4t + 5$

have faktoropløsningen $p(t) = (t + 2 + i)(t + 2 - i)$.

Og generelt vil komplekse rødder i et andengradspolynomium med reelle koefficienter være komplekst konjugerede, dvs er $\alpha + i\beta$ rod vil også $\alpha - i\beta$ være rod, og man har at

$$p(t) = (t - (\alpha + i\beta))(t - (\alpha - i\beta)) = t^2 - 2\alpha t + \alpha^2 + \beta^2.$$

Derfor burde nulrummet for operatoren

$$p(D) = D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)D^0$$

have følgende basis

$$\{e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}\}.$$

Disse to funktioner er imidlertid ikke reelle, og de tilhører derfor ikke $C^\infty(\mathbb{R})$. De vil imidlertid begge tilhøre $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Vi vil nu undersøge, om det med en passende valgt (kompleks) linearkombination af disse to funktioner vil være muligt at bestemme en reel funktion. Hertil kan vi benytte, at

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t).$$

Man kan således omskrive et element i nulrummet på følgende måde

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= c_1 e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) + c_2 e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t) \\ &= e^{\alpha t}[(c_1 + c_2) \cos \beta t + i(c_1 - c_2) \sin \beta t] \\ &= k_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + k_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \end{aligned}$$

netop når

$$c_1 = (k_1 - ik_2)/2 \quad \text{og} \quad c_2 = (k_1 + ik_2)/2$$

med $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, dvs når c_1 og c_2 vælges komplekst konjugerede, vil f blive en reel funktion.

Vi kan således se, at også $\{e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t\}$ vil være en basis for $N(p(D))$, og den har tilmed den fordel, at dens elementer er reelle funktioner - og de tilhører derfor $C^\infty(\mathbb{R})$.

Eksempel B5. Med $L = D^2 + 4D + 5D^0$ bliver det tilhørende anden-gradspolynomium $p(t) = t^2 + 4t + 5 = (t + 2 + i)(t + 2 - i)$ som vist ovenfor, og man har da $N(L) = \text{span}\{e^{-2t} \cos t, e^{-2t} \sin t\}$.

Hvis $\alpha + i\beta$ er rod i polynomiet med multiplicitet k , vil tilsvarende $\alpha - i\beta$ være rod i polynomiet med multiplicitet k , og man kan på en tilsvarende måde som ovenfor vise, at de to komplekse elementer $t^i e^{(\alpha+i\beta)t}$ og $t^i e^{(\alpha-i\beta)t}$ kan erstattes med de to reelle

$$t^i e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{og} \quad t^i e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Herefter kan vi opsamle vores resultater om fastlæggelse af en basis for nulrummet til den lineære differentialoperator $L = p(D)$ hvor

$$p(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_1t + b_0.$$

- a) Er a en enkelt reel rod i $p(t)$ vil

$$e^{at} \in N(L)$$

- b) Er a en reel rod med multiplicitet k i $p(t)$ vil

$$e^{at}, te^{at}, \dots, t^{k-1}e^{at} \in N(L)$$

- c) Er $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ enkle, komplekst konjugerede rødder i $p(t)$, vil

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t \in N(L)$$

- d) Er endelig $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ komplekst konjugerede rødder med multiplicitet k i $p(t)$, vil

$$\begin{aligned} &e^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \cos \beta t, \\ &e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \sin \beta t \in N(L) \end{aligned}$$

Egenrum for lineære differentialoperatorer.

Er μ egenværdi for en lineær afbildning $g: V \rightarrow V$, vil samtlige egenvektorer for g svarende til egenværdien μ - sammen med 0-elementet - være et underrum. Dette underrum kaldes egenrummet for μ - E_μ . Vi ved endvidere, at dette egenrum er nulrummet for afbildningen $g - \mu i$, dvs $E_\mu = N(g - \mu i)$.

Er således $L: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ en lineær differentialoperator, kan man efterspørge egenfunktionerne for L svarende til en egenværdi

μ , dvs finde samtlige funktioner $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, som opfylder

$$Lf = \mu f,$$

hvilket - som nævnt ovenfor - svarer til at finde en basis for nulrummet $N(L - \mu D^0)$.

Eksempel B6: Vi betragter differentialoperatoren $L = D^3 - 3D - 2D^0$ og vil finde en basis for egenrummet svarende til egenværdien -4 . Dvs vi skal finde funktioner f , der opfylder $Lf = -4f$, eller en basis for nulrummet for operatoren $L + 4D^0$. Dette modsvarer polynomiet $p(t) = t^3 - 3t - 2 + 4 = t^3 - 3t + 2 = (t - 1)^2(t + 2)$. Da er

$$E_{-4} = N(L + 4D^0) = \text{span}\{e^t, te^t, e^{-2t}\}.$$

Afsnit C: Diagonalisering og Jordans normalform.

Som det fremgår af lærebogen kan en lineær afbildning T på et n -dimensionalt komplekst vektorrum V diagonaliseres, hvis det karakteristiske polynomium faktoriserer helt, og hvis der findes en basis for V af egenvektorer for T .

Betegner α standardbasen i V , skal A betegne den til T svarende $n \times n$ matrix i forhold til α -basen. Man kan nu udfolde diagonaliseringen af T . Antager vi, at A - og derfor også T - har egenværdierne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - hvor flere egenværdier kan være ens - med de tilhørende egenvektorer v_1, \dots, v_n - som er lineært uafhængige - da gælder at

$$\forall i : Av_i = \lambda_i v_i.$$

Indføres matricen $Q = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, hvor Q i søjlerne netop har alle de lineært uafhængige egenvektorer, er

$$\begin{aligned} AQ &= (Av_1, Av_2, \dots, Av_n) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n) \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= QD \end{aligned}$$

hvor D er en diagonalmatrix med egenværdierne i diagonalen, netop opskrevet i den samme rækkefølge, som egenvektorerne er opskrevet i transformationsmatricen Q . Da søjlerne i Q er lineært uafhængige svarer $AQ = QD$ til at

$$D = Q^{-1}AQ.$$

Spørgsmålet er nu, hvad der sker, når man ikke har en basis for \mathbb{C}^n af egenvektorer for A - eller en basis for V af egenvektorer for T .

I lærebogen besvares det med et længere bevis for sætning 7.4, som bygger på et endnu længere bevis for sætning 7.3. I forlængelse af afsnit A er vi imidlertid i stand til at give et meget kort bevis for indholdet i sætning 7.4 - dog med en anden ordlyd.

I det følgende betragtes igen det endeligdimensionale vektorrum V og den lineære afbildning $T: V \rightarrow V$, hvor vi forudsætter, at det karakteristiske polynomium for T - $p(t)$ faktoriserer helt, så T har egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ med multiplicitet m_1, m_2, \dots, m_k og $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Endvidere defineres det **generaliserede egenrum** for T svarende til

λ ved

$$K_\lambda(T) = \{ x \in V \mid \exists p \in \mathbb{N}: (T - \lambda I)^p(x) = 0 \}.$$

I sætning 7.1 og sætning 7.2 i lærebogen bevises det, at $K_\lambda(T)$ er et T -invariant underrum, samt at

$$K_\lambda(T) = N((T - \lambda I)^m)$$

hvor $m = \text{mult}(\lambda)$. Endvidere har vi fra sætning 5.28 - dvs Cayley-Hamiltons sætning, at

$$p(T) = T_0$$

hvor T_0 er nulafbildningen - dvs $\forall x \in V: T_0(x) = 0$.

Vi vil nu være i stand til at bevise sætning 7.4 - dog i en anden formulering:

Sætning C1: V er direkte sum af de generaliserede egenrum for T .

Da det karakteristiske polynomium for T faktoriserer helt vil

$$p(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_k)^{m_k},$$

og ifølge sætning A5, vil

$$N(p(T)) = N((T - \lambda_1 I)^{m_1}) \oplus N((T - \lambda_2 I)^{m_2}) \oplus \dots \oplus N((T - \lambda_k I)^{m_k}).$$

Da endvidere

$$K_\lambda(T) = N((T - \lambda I)^m)$$

bliver

$$N(p(T)) = K_{\lambda_1}(T) \oplus K_{\lambda_2}(T) \oplus \dots \oplus K_{\lambda_k}(T).$$

Da tillige

$$p(T) = T_0$$

er

$$N(p(T)) = V$$

og vi har så bevist, at

$$V = K_{\lambda_1}(T) \oplus K_{\lambda_2}(T) \oplus \dots \oplus K_{\lambda_k}(T). \quad \#$$

Dette kan let reformuleres til indholdet i sætning 7.4. Er β_i således en basis af generaliserede egenvektorer for rummet $K_{\lambda_i}(T)$, bliver en basis β for V af generaliserede egenvektorer fastlagt ved

$$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_k$$

hvor $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset$ for alle $i, j = 1, 2, \dots, k$ med $i \neq j$.

Da alle de generaliserede egenrum er T -invariante, kan man bestemme den til T svarende matrix men hensyn til β , ved at sammensætte den af blokmatrixer i diagonalen, hvor hver blok kun er vedrører en basis β_i .

Af sætning 7.7 i lærebogen fremgår det endvidere, at en sådan basis β_i er sammensat af et antal cykler - $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$ af generaliserede egenvektorer. Er der q egenvektorer er der også q cykler - for den pågældende egenværdi - da netop startvektoren af hver sådan cykel er en egenvektor. En cykel af generaliserede egenvektorer for T svarende til egenværdien λ er på formen

$$\{(T-\lambda I)^{p-1}(v), (T-\lambda I)^{p-2}(v), \dots, (T-\lambda I)(v), v\}$$

Denne cykel siges at have længde p .

Da hver sådan cykel γ_j er basis for et T -cyklisk underrum - der jo er T -invariant, kan der svarende til hver cykel bestemmes en blokmatrix som en del af blokmatricen svarende til basen β_i .

Vi betragter igen matricen A svarende til T i standardbasen α og det tilfælde, hvor en cykel $\gamma = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ for egenværdien λ har længden p . Startvektoren v_1 - dvs den eneste egenvektor opfylder jo, at

$$Av_1 = \lambda v_1 \quad \text{eller} \quad (A - \lambda I)v_1 = 0$$

De resterende $p-1$ vektorer i cyklen opfylder da følgende algoritme - jfr definitionen på en sådan cykel

$$\begin{aligned} Av_2 &= \lambda v_2 + v_1 & \text{eller} & & (A - \lambda I)v_2 &= v_1 \\ Av_3 &= \lambda v_3 + v_2 & \text{eller} & & (A - \lambda I)v_3 &= v_2 \\ &\vdots & & & & \\ &\vdots & & & & \\ Av_p &= \lambda v_p + v_{p-1} & \text{eller} & & (A - \lambda I)v_p &= v_{p-1} \end{aligned}$$

Bemærk her, at $(A - \lambda I)^{p-1}v_p = v_1$ i overensstemmelse med definitionen af en cykel med længde p .

$$\text{Sættes som før} \quad Q = (v_1, v_2, \dots, v_p)$$

$$\text{bliver} \quad AQ = (Av_1, Av_2, \dots, Av_p)$$

$$= (\lambda v_1, \lambda v_2 + v_1, \dots, \lambda v_p + v_{p-1})$$

$$= Q \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= QJ$$

Denne matrix J kaldes en **jordanmatrix**, og den består af en egenværdi for A - og for T - i diagonalen og af et 1-tal lige over diagonalen i de søjler, hvor der i Q står en generaliseret egenvektor. De p lineært uafhængige vektorer, der udgør søjlerne i Q , kaldes tilsvarende en **jordanbasis**.

Eksempel C2. Med matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bliver det karakteristiske polynomium $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^3$, dvs $\lambda = 1$ er den eneste egenværdi. Af $(A - I)v_1 = 0$ kan man nu bestemme egenvektorerne svarende til egenværdien 1, dvs

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og man får, at $-z = 0$ og $x + y = 0$. Således bliver den eneste egenvektorretning fastlagt til fx

$$v_1 = (-1, 1, 0).$$

Benyttes nu algoritmen skal vi altså finde v_2 , således at

$$(A - I)v_2 = v_1,$$

eller

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvilket giver $-z = -1$ og $x + y = 1$ dvs

$$v_2 = (1, 0, 1)$$

Bemærk at man lige så vel kunne have valgt $(0, 1, 1)$ eller $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

Algoritmen skal fortsættes, således at man finder v_3 af

$$(A - I)v_3 = v_2,$$

eller

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der giver $-z = 1$ og $x + y = 0$, dvs vektorretningen bliver fx

$$v_3 = (0, 0, -1).$$

Herefter bliver matricerne

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og for at sikre at der er regnet rigtig skal $AQ = QJ$, hvilket en simpel udregning bekræfter. #

Eksempel C3: I eksemplet ovenfor kunne man også benytte den algoritme, der er beskrevet i lærebogen, dvs at man udregner

$$\text{rang}((A - I)^j)$$

for $j = 1, 2, 3$. Da $\text{rang}(A - I) = 2$ vil 'prikdiagrammet' fortælle, at der kun er én cykel af generaliserede egenvektorer for $\lambda = 1$. Af $\text{rang}((A - I)^3) = 0$ ses det, at $K_1 = \mathbb{R}^3$, og derfor kan en basis for K_1 fx være standardbasen. Vi kan da fx vælge

$$v = (0, 0, 1)$$

som slutvektor, og da bliver

$$(A - I)v = (-1, 0, -1) \quad \text{og} \quad (A - I)^2 v = (1, -1, 0)$$

der vi give en matrix Q der bortset fra fortegnene er som i eksempel C2.

Havde man i stedet valgt $v = (1, 0, 0)$ eller $v = (0, 1, 0)$ som slutvektor, ville man få

$$(A - I)v = (0, 1, 1) \quad \text{og} \quad (A - I)^2 v = (-1, 1, 0)$$

og dermed bliver fx

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og igen kan man ved en simpel udregning bekræfte, at $AQ = QJ$. #

Eksempel C4. Matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

har det karakteristiske polynomium $\det(A - \lambda E) = -(1 + \lambda)^3$, dvs den eneste egen værdi er -1 med $\text{mult}(-1) = 3$. Af $(A + I)v = 0$ får man tre ens ligninger af formen

$$x - 2y + z = 0,$$

og en basis for egenrummet E_{-1} er fx

$$\{(2, 1, 0); (1, 0, -1)\}.$$

Der vil derfor være to cykler af generaliserede egenvektorer, og af

$$\text{rang}((A + E)^2) = 0$$

får man som i forrige eksempel, at $K_{-1} = \mathbb{R}^3$. Man kan så fx vælge slutvektoren

$$\mathbf{v} = (1, 0, 0).$$

Bemærk, at man også kunne have valgt $(0, 0, 1)$ eller $(0, 1, 0)$.

Da får man, at

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{v} = (1, 1, 1)$$

og de to cykler er $\gamma_1 = \{(1, 1, 1); (1, 0, 0)\}$ og $\gamma_2 = \{(1, 0, -1)\}$. Herefter bliver matricerne

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Det bekræftes ved udregning, at matricerne opfylder $\mathbf{AQ} = \mathbf{QJ}$. #

Eksempel C5: Matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

har det karakteristiske polynomium $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (2 - \lambda)^3(6 - \lambda)$.

Da $\text{mult}(2) = 3$, skal vi først undersøge $\text{rang}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$, og med

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ser man, at 2. og 4. søjle er ens, og at de tre første søjler er lineært uafhængige, dvs $\text{rang}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 3$. Derfor fortæller 'prikdiagrammet' for denne egen værdi, at der kun er en egenvektorretning. Den er en løsning til $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$, fx

$$\mathbf{v} = (0, 1, 0, -1).$$

Når vi herefter skal bestemme den cykel γ af generaliserede egenvektorer, der svarer til $\lambda = 2$, ved vi at $\text{rang}((\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^3) = 1$ - hvorfor? Af

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^3 = \begin{pmatrix} -8 & 32 & 40 & 32 \\ -10 & 40 & 50 & 40 \\ -8 & 32 & 40 & 32 \\ 2 & -8 & -10 & -8 \end{pmatrix}$$

ser vi $K_2 = N((\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^3) = \{(x, y, z, w) \mid x - 4y - 5z - 4w = 0\}$, og man kan vælge en basis for dette rum, fx

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \{(0, 1, 0, -1); (1, -1, 1, 0); (4, 1, 0, 0)\},$$

hvor \mathbf{u} er den fundne egenvektor og $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = 3\mathbf{u}$, så de kan ikke benyttes som slutvektor i cyklen γ - hvorfor?

Tilbage er \mathbf{w} , og af

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{w} = (6, 9, 6, -15) \quad \text{og} \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2\mathbf{w} = (0, 18, 0, -18)$$

finder vi, at vektorerne i cyklen γ er

$$\{(0, 18, 0, -18); (6, 9, 6, -15); (4, 1, 0, 0)\}.$$

Af $(\mathbf{A} - 6\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$ finder vi, at en egenvektor svarende til $\lambda = 6$ vil være

$$\mathbf{v} = (4, 5, 4, -1).$$

Herefter har vi fundet matricerne

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 4 \\ 18 & 9 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ -18 & -15 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

og som før bekræfter $\mathbf{AQ} = \mathbf{QJ}$ at der er regnet rigtigt. #

Afsnit D: Løsning af et system af første ordens lineære differentialligninger.

Vi tager udgangspunkt i de n koblede, lineære differentialligninger af første orden

$$f_1'(t) = a_{11}f_1(t) + \dots + a_{1n}f_n(t)$$

$$f_2'(t) = a_{21}f_1(t) + \dots + a_{2n}f_n(t)$$

$$\vdots$$

$$f_n'(t) = a_{n1}f_1(t) + \dots + a_{nn}f_n(t)$$

Vi lader nu \mathbf{A} repræsentere matricen af a_{ij} -erne, og vi sætter vektoren

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))^T$$

Herved kan differentialligningssystemet i komprimeret form skrives

$$(*) \quad \mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t).$$

I afsnit C er der vist, hvordan man altid kan transformere en matrix til jordans normalform. Man vælger transformationsmatricen \mathbf{S} , således at matrixens søjler netop består af jordanbasen. Dernæst kan man entydigt fastlægge en ny funktion $\mathbf{g}(t)$ ved

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{g}(t)$$

da \mathbf{S} er invertibel. Indsættes dette \mathbf{f} i ligningen $(*)$, bliver

$$\mathbf{S}\mathbf{g}'(t) = \mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{g}(t)$$

eller da matricen \mathbf{S} er invertibel (søjlerne i \mathbf{S} er en basis) er

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{g}(t) = \mathbf{J}\mathbf{g}(t).$$

Hvis alle søjlerne i \mathbf{S} er egenvektorer for \mathbf{A} , vil \mathbf{J} være en diagonalmatrix, men hvis ikke alle vektorer i \mathbf{S} er egenvektorer vil der i \mathbf{J} stå et 1-tal lige over diagonalelementet i netop de søjler, hvor der i den tilsvarende søjle i \mathbf{S} står en generaliseret egenvektor.

Der er herefter to tilfælde at undersøge (selv om tilfældet med diagonalmatricen blot er et specialtilfælde af det andet):

1. Er alle søjler i \mathbf{S} egenvektorer kan det transformerede differentialligningssystem

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{D}\mathbf{g}(t)$$

opdeles i n enkeltligninger, som ikke afhænger af hinanden, dvs

$$g_i'(t) = \lambda_i g_i(t), \quad \text{hvor } i = 1, \dots, n.$$

Disse ligninger har derfor løsningen

$$g_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}, \quad \text{hvor } i = 1, \dots, n.$$

Løsningerne til det oprindelige system findes så ved at transformere tilbage med

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{S} \mathbf{g}(t).$$

2. Er ikke alle søjler i \mathbf{S} egenvektorer, betragter vi den del af hele systemet

$$(**) \quad \mathbf{g}'(t) = \mathbf{J} \mathbf{g}(t),$$

som kun vedrører én cykel af generaliserede egenvektorer for egenværdien ξ . Lad os antage, at cyklen har længden k .

Da vil matricen \mathbf{J} indeholde $k \times k$ -blokmatrix \mathbf{J}_ξ , der har formen

$$\mathbf{J}_\xi = \begin{pmatrix} \xi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

og den del af differentialligningssystemet (**), som svarer til denne blok, bliver derfor

$$g_1'(t) = \xi g_1(t) + g_2(t) \quad , \quad g_2'(t) = \xi g_2(t) + g_3(t)$$

.

$$g_{k-1}'(t) = \xi g_{k-1}(t) + g_k(t) \quad , \quad g_k'(t) = \xi g_k(t)$$

Løses dette differentialligningssystem bagfra, finder vi at

$$g_k(t) = c_k e^{\xi t}$$

$$g_{k-1}(t) = c_k t e^{\xi t} + c_{k-1} e^{\xi t}$$

.

$$g_2(t) = \frac{c_k}{(k-2)!} t^{k-2} e^{\xi t} + \dots + c_2 e^{\xi t}$$

$$g_1(t) = \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\xi t} + \dots + c_2 t e^{\xi t} + c_1 e^{\xi t}.$$

Tilsvarende løses differentialligningssystemet (**) svarende til de øvrige cykler for ξ , og dernæst svarende til de øvrige egenverdier. Løsningerne til det oprindelige system findes ved at transformere tilbage med

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{g}(t).$$

Eksempel D1. Vi betragter differentialligningssystemet

$$f_1'(t) = -2f_2(t) + f_3(t)$$

$$f_2'(t) = f_1(t) - 3f_2(t) + f_3(t)$$

$$f_3'(t) = f_1(t) - 2f_2(t).$$

Matricen \mathbf{A} i dette system er behandlet i eksempel C4. Her finder vi transformationsmatricen \mathbf{S} og jordanmatricen \mathbf{J} til

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Her er den sidste søjle i \mathbf{S} en generaliseret egenvektor, og derfor står der i \mathbf{J} et 1-tal over diagonalelementet i sidste søjle. Herefter bliver differentialligningssystemet

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{g}(t)$$

til de tre differentialligninger

$$g_1'(t) = -g_1(t)$$

$$g_2'(t) = -g_2(t) + g_3(t)$$

$$g_3'(t) = -g_3(t),$$

der får løsningerne

$$g_1(t) = c_1 e^{-t}$$

$$g_2(t) = c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t}$$

$$g_3(t) = c_3 e^{-t}.$$

Når man så transformerer tilbage med $\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{g}(t)$ bliver den fuldstændige løsning til det oprindelige differentialligningssystem

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & t e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

eller lidt omskrevet

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ t \end{pmatrix} \right] \quad \#$$

Eksempel D2. Vi betragter differentialligningssystemet

$$f_1'(t) = f_1(t) - f_3(t)$$

$$f_2'(t) = f_1(t) + 2f_2(t)$$

$$f_3'(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

Matricen **A** i dette system er behandlet i eksempel C2 og C3. Her fandt vi transformationsmatricen **S** og jordanmatricen **J** til

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hvor kun den første søjle i **S** er egenvektor, og derfor står der i **J** et 1-tal over begge diagonalelementerne. Herefter bliver differentialligningssystemet

$$g'(t) = Jg(t)$$

til de tre differentialligninger

$$g_1'(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$g_2'(t) = g_2(t) + g_3(t)$$

$$g_3'(t) = g_3(t).$$

Løst bagfra bliver løsningerne

$$g_1(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t / 2$$

$$g_2(t) = c_2 e^t + c_3 t e^t$$

$$g_3(t) = c_3 e^t.$$

Når man transformerer tilbage med **S** bliver den fuldstændige løsning

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

eller lidt omskrevet

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = e^t \left[c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 - t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} t - t^2/2 \\ t^2/2 \\ t - 1 \end{pmatrix} \right] \#$$

Med denne gennemgang er spørgsmålet om at bestemme den fuldstændige løsning til et system af første ordens lineære differentialligninger besvaret helt. Det betyder, at også de tilfælde, hvor egenverdierne er komplekse, er omfattet af denne gennemgang. Det er imidlertid ikke klart, om de fundne løsninger også vil være

reelle, når egenverdierne er komplekse. Der kræves lidt forberedelse for at undersøge dette.

Er matricen A reel, vil det karakteristiske polynomium også være reelt, og hvis der optræder komplekse rødder i dette polynomium, vil de være parvist komplekst konjugerede med samme algebraiske multiplicitet. De tilhørende egenvektorer vil tilsvarende være komplekst konjugerede, og generaliserede egenvektorer i jordan-basen vil også kunne vælges komplekst konjugerede. Disse påstande vises ganske let, jfr det følgende.

Er $\alpha + i\beta$ en egenværdi for matricen A med tilhørende egenvektor u , dvs at

$$Au = (\alpha + i\beta)u$$

vil man - da A er reel - ved at konjugere ligningen få

$$A\bar{u} = (\alpha - i\beta)\bar{u},$$

dvs $\alpha - i\beta$ er egenværdi for A med \bar{u} som tilhørende egenvektor.

Er tilsvarende vektoren u_1 en generaliseret egenvektor svarende til egenværdien $\alpha + i\beta$, dvs at

$$Au_1 = (\alpha + i\beta)u_1 + u$$

vil man ved konjugering få, at

$$A\bar{u}_1 = (\alpha - i\beta)\bar{u}_1 + \bar{u},$$

hvilket viser, at \bar{u}_1 vil være en generaliseret egenvektor svarende til egenværdien $\alpha - i\beta$.

Lad os første se på et specialtilfælde:

Eksempel D3. Betragtes differentialligningssystemet

$$f_1'(t) = af_1(t) - bf_2(t)$$

$$f_2'(t) = bf_1(t) + af_2(t),$$

vil den tilhørende matrix have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (a - \lambda)^2 + b^2,$$

der har rødderne $a + ib$ og $a - ib$. De tilhørende egenvektorer bliver

$$u = (1, -i)^T \quad \bar{u} = (1, i)^T.$$

Vælges transformationsmatricen S med disse to vektorer som søjler, vil transformationen $f(t) = Sg(t)$ give differentialligningssystemet

$$g_1' = (a + ib)g_1 \quad \text{og} \quad g_2' = (a - ib)g_2.$$

der har løsningerne

$$g_1(t) = c_1 e^{at} e^{ibt} \quad \text{og} \quad g_2(t) = c_2 e^{at} e^{-ibt},$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Disse løsninger er langt fra reelle. Transforms-
res løsningerne tilbage med S , og vælges konstanterne fx til

$$c_1 = (k_1 + ik_2)/2 \quad \text{og} \quad c_2 = (k_1 - ik_2)/2$$

hvor $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, bliver

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ibt} & 0 \\ 0 & e^{-ibt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k_1 + ik_2)/2 \\ (k_1 - ik_2)/2 \end{pmatrix}$$

Benyttes tillige, at

$$e^{ibt} = \cos bt + i \sin bt$$

bliver

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Prøv selv! Hermed er der i dette specialtilfælde redegjort for, at man kan finde reelle løsningerne, selv om egenværdierne for matricen er komplekst konjugerede. #

Vi betragter nu et differentialligningssystem (som vi for nemheds skyld antager, består af fire lineære differentialligninger)

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t),$$

hvor den reelle matrix \mathbf{A} antages at have de komplekst konjugerede egenværdier $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ med algebraisk multiplicitet 2 og geometrisk multiplicitet 1. Hermed vil en jordanbasis i \mathbb{C}^4 bestå af

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2\},$$

hvor \mathbf{u}_1 og $\bar{\mathbf{u}}_1$ er egenvektorer, mens de to andre er generaliserede egenvektorer. Vælges transformationsmatricen S med netop disse fire søjler i denne anførte rækkefølge, giver transformationen $\mathbf{f}(t) = S\mathbf{g}(t)$ netop jordanmatricen

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - i\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$$

i differentialligningssystemet

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{g}(t),$$

der består af de fire differentialligninger

$$g_1'(t) = (\alpha + i\beta)g_1(t) + g_2(t) \quad , \quad g_2'(t) = (\alpha + i\beta)g_2(t)$$

$$g_3'(t) = (\alpha - i\beta)g_3(t) + g_4(t) \quad , \quad g_4'(t) = (\alpha - i\beta)g_4(t)$$

der giver følgende løsninger

$$g_1(t) = c_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} + c_2 t e^{\alpha t} e^{i\beta t} \quad , \quad g_2(t) = c_2 e^{\alpha t} e^{i\beta t}$$

$$g_3(t) = c_3 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} + c_4 t e^{\alpha t} e^{-i\beta t} \quad , \quad g_4(t) = c_4 e^{\alpha t} e^{-i\beta t}.$$

Når vi transformere disse løsninger tilbage til den oprindelige basis med S , bliver

$$\begin{aligned} f(t) = e^{\alpha t} [& (c_1 u_1 e^{i\beta t} + c_3 \bar{u}_1 e^{-i\beta t}) + t(c_2 u_1 e^{i\beta t} + c_4 \bar{u}_1 e^{-i\beta t}) \\ & + (c_2 u_2 e^{i\beta t} + c_4 \bar{u}_2 e^{-i\beta t})]. \end{aligned}$$

Skal man godtgøre, at disse vektorligninger kan gøres reelle, indfører vi vektorernes reel- og imaginærdele

$$u_1 = v_1 - i v_2 \quad \text{og} \quad u_2 = v_3 - i v_4.$$

Endvidere vælger vi koefficienterne c_i hensigtsmæssigt til

$$c_1 = (k_1 + i k_2)/2 \quad , \quad c_2 = (k_3 + i k_4)/2$$

$$c_3 = (k_1 - i k_2)/2 \quad , \quad c_4 = (k_3 - i k_4)/2,$$

og erindrer, at

$$e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \sin \beta t.$$

Dermed bliver

$$\begin{aligned} f(t) = e^{\alpha t} [& v_1(k_1 \cos \beta t - k_2 \sin \beta t) + v_2(k_1 \sin \beta t + k_2 \cos \beta t) \\ & + v_3(k_3 \cos \beta t - k_4 \sin \beta t) + v_4(k_3 \sin \beta t + k_4 \cos \beta t) \\ & + v_1 t(k_3 \cos \beta t - k_4 \sin \beta t) + v_2 t(k_3 \sin \beta t + k_4 \cos \beta t)] \end{aligned}$$

eller

$$f(t) = e^{\alpha t} (v_1, v_2, v_3, v_4) \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t & t \cos \beta t & -t \sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t & t \sin \beta t & t \cos \beta t \\ 0 & 0 & \cos \beta t & -\sin \beta t \\ 0 & 0 & \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}$$

Hermed er den fuldstændige løsning fundet, og som man kan se, er den rent reel. Der er hermed dog ikke ført fuldt bevis for, at man til et lineært differentialligningssystem med komplekst konjugerede egenverdier med algebraisk multiplicitet p og geometriske multiplicitet $k < p$ altid kan bestemme en fuldstændig løsning på reel form, men de her gennemførte udregninger sandsynliggør, at analoge betragtninger på et større system vil give et tilsvarende resultat.

Alternativ fremstilling af den fuldstændige løsning til en n-te ordens lineær differentialligning.

Man kan imidlertid også på baggrund af det foregående bestemme en basis for nulrummet svarende til en n-te ordens lineær differentialoperator. Man omskriver den n-te ordens lineære differentialligning

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0D^0)f(t) = 0.$$

til første ordens lineære differentialligninger. Man indfører således funktionerne

$$f_1 = f, \quad f_2 = Df, \quad \dots, \quad f_n = D^{n-1}f$$

og herved kan man dels opskrive ligningerne

$$f_1' = f_2, \quad f_2' = f_3, \quad \dots, \quad f_{n-1}' = f_n$$

og dels ved indsættelse i den oprindelige ligning få

$$f_n' = D^n f = -a_0 f_1 - a_1 f_2 - \dots - a_{n-1} f_n.$$

Disse ialt n lineære differentialligninger af første orden kan nu med fordel opskrives på matrixform $f'(t) = Af(t)$ således

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Skal dette ligningssystem løses, skal matricen enten diagonaliseres eller (i det mindste) bringes på jordans normalform. Hertil skal vi bestemme samtlige egenværdier for matricen A .

Vi skal altså bestemme det karakteristiske polynomium, dvs

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

eller

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

Ganges først alle søjler med (-1) , og foretages herefter følgende søjleoperationer:

$$s_{n-1} = s_{n-1} + \lambda s_n, \quad \dots, \quad s_1 = s_1 + \lambda s_2$$

bliver

$$p(\lambda) = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ F(\lambda) & * & * & \dots & * & * \end{vmatrix}$$

hvor $F(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$, og hvor * betyder et led uden interesse, da man udvikler determinanten efter første søjle. Dette giver

$$p(\lambda) = (-1)^n (-1)^{n+1} F(\lambda) (-1)^{n-1}$$

eller

$$p(\lambda) = (-1)^n (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n)$$

Egenværdierne for matricen A er altså samtlige rødder i polynomiet $p(\lambda)$. Dette polynomium er præcis det samme, som optræder i afsnit B.

Skal man herefter bestemme den eller de egenvektorer, som svarer til den fundne egenværdi, skal man jo finde samtlige vektorer, som opfylder

$$(A - \lambda E)v_1 = 0.$$

Dette giver følgende sammenhørende ligninger

$$\begin{aligned} -\lambda x_1 + x_2 &= 0 & , & & -\lambda x_2 + x_3 &= 0 \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-2} x_{n-1} - (a_{n-1} - \lambda) x_n &= 0. \end{aligned}$$

Disse ligninger kan omskrives til

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda x_1 & , & & x_3 &= \lambda x_2 = \lambda^2 x_1 & , \\ x_4 &= \lambda x_3 = \lambda^3 x_1 & , & \dots & , & & x_n &= \lambda x_{n-1} = \lambda^{n-1} x_1, \end{aligned}$$

og den sidste ligning på forrige side omskrives herefter til

$$-x_1(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n) = 0$$

eller

$$-x_1 p(\lambda) = 0.$$

Da λ er rod i det karakteristiske polynomium, er $p(\lambda) = 0$, og vi kan derfor vælge x_1 frit fx til $x_1 = 1$. Da bliver egenrummet svarende til egenværdien λ

$$E_\lambda = \text{Sp}\{(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-2}, \lambda^{n-1})^T\},$$

dvs uanset hvilken algebraisk multiplicitet λ har, er $gm(\lambda) = 1$. Derfor vil matricen A transformere til en jordanmatrix med 1-taller over diagonalen netop for alle de egenværdier, som har alge-

braisk multiplicitet større end 1.

I sådanne tilfælde skal man altså bestemme en vektor \mathbf{v}_2 , som opfylder

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

hvor jo $\mathbf{v}_1 = (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})^T$. Man får da de sammenhørende ligninger

$$\begin{aligned} -\lambda x_1 + x_2 &= 1, & -\lambda x_2 + x_3 &= \lambda \\ &\dots & & \\ &\dots & & \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - (a_{n-1} - \lambda) x_n &= \lambda^{n-1} \end{aligned}$$

Disse ligninger kan nu omskrives til

$$x_2 = 1 + \lambda x_1, \quad x_3 = \lambda + \lambda x_2 = 2\lambda + \lambda^2 x_1$$

$$x_4 = \lambda^2 + \lambda x_3 = 3\lambda^2 + \lambda^3 x_1, \quad \dots$$

$$x_n = \lambda^{n-2} + \lambda x_{n-1} = \lambda^{n-2} + \lambda^{n-2}(n-2 + \lambda x_1) = (n-1)\lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} x_1,$$

og den sidste ligning ovenfor omskrives herefter til

$$\begin{aligned} &-x_1(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n) \\ &- (a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2} + n\lambda^{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

eller

$$-x_1 p(\lambda) - p'(\lambda) = 0.$$

Er $\text{algm}(\lambda) \geq 2$, dvs når såvel $p(\lambda) = 0$ som $p'(\lambda) = 0$ kan en "syn-tetisk" vektor fx vælges til

$$\mathbf{v}_2 = (0, 1, 2\lambda, 3\lambda^2, \dots, (n-1)\lambda^{n-2})^T,$$

(hvor man har sat $x_1 = 0$). **Bemærk**, at vektoren \mathbf{v}_2 også kan fremkomme af vektoren \mathbf{v}_1 ved differentiation mht λ .

Er $\text{algm}(\lambda) \geq 3$ kan man tilsvarende bestemme en vektor \mathbf{v}_3 af

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2.$$

En sådan vektor er fx

$$\mathbf{v}_3 = (0, 0, 2, 6\lambda, 12\lambda^2, \dots, (n-1)(n-2)\lambda^{n-3})^T$$

Bemærk, at vektoren \mathbf{v}_3 også kan fremkomme af \mathbf{v}_2 ved differentia-tion mht λ .

Når transformationsmatricen \mathbf{S} er færdigkonstrueret efter denne recept, kan vi overgå til løsning af differentialligningssystemet $\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t)$. Bemærk, at vi udelukkende er interesseret i at finde f_1 (første koordinat i \mathbf{f}). Benyttes som sædvanlig transforma-tionen $\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{g}(t)$, vil differentialligningssystemet blive

overført i

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{g}(t)$$

hvor \mathbf{J} er en jordanmatrix med 1-taller lige over diagonalen i netop de søjler, hvor der i \mathbf{S} står en "syntetisk" vektor.

Er ξ en egen værdi for \mathbf{A} med $\text{alg m}(\xi) = k (> 1)$, vil som før vist $\text{gm}(\xi) = 1$, og derfor vil den $k \times k$ -delmatrix \mathbf{J}_ξ af \mathbf{J} , som svarer til ξ , have formen

$$\mathbf{J}_\xi = \begin{pmatrix} \xi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

og den del af differentialligningssystemet, som skal løses svarende til ξ , bliver derfor

$$g_1'(t) = \xi g_1(t) + g_2(t) \quad , \quad g_2'(t) = \xi g_2(t) + g_3(t)$$

.

$$g_{k-1}'(t) = \xi g_{k-1}(t) + g_k(t) \quad , \quad g_k'(t) = \xi g_k(t)$$

Løses dette differentialligningssystem bagfra, finder vi at

$$g_k(t) = c_k e^{\xi t}$$

$$g_{k-1}(t) = c_k t e^{\xi t} + c_{k-1} e^{\xi t}$$

.

$$g_2(t) = \frac{c_k}{(k-2)!} t^{k-2} e^{\xi t} + \dots + c_2 e^{\xi t}$$

$$g_1(t) = \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\xi t} + \dots + c_2 t e^{\xi t} + c_1 e^{\xi t}.$$

Da imidlertid den del af transformationsmatricen \mathbf{S} , som er knyttet til egen værdien ξ , er en nedre trekantmatrix med et 1-tal på første plads i første søjle (jfr udregningen af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ osv), vil man af transformationen $\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{g}(t)$ få, at

$$f_1(t) = g_1(t) + \text{bidrag fra \u00f8vrige egen v\u00e6rdier}$$

dvs nulrummet for differentialoperatoren

$$L_n = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 D^0$$

vil - svarende til egen værdien ξ - have følgende basis

$$\{e^{\xi t}, t e^{\xi t}, \dots, t^{k-1} e^{\xi t}\}.$$

Dette resultat er identisk med resultatet midt p\u00e5 side 6.

Afsnit E: Supplerende opgaver

1. C^0 er rummet af alle reelle, kontinuerte funktioner. Der er givet følgende delmængder

$$\begin{aligned} F_1 &= \{ f \in C^0 \mid f(1) = 0 \} \\ F_2 &= \{ f \in C^0 \mid f(0) = 1 \} \\ F_3 &= \{ f \in C^0 \mid f(0) = 0 \wedge f(1) = 0 \} \end{aligned}$$

Hvilke af disse mængder vil være underrum i C^0 ?

2. C^p er rummet af alle reelle, p gange kontinuerte, differentiable funktioner. Idet f' betyder den afledede af f , defineres følgende delmængder

$$\begin{aligned} G_1 &= \{ f \in C^1 \mid f' + af = 0 \} \\ G_2 &= \{ f \in C^1 \mid f' + f^2 = 0 \} \\ G_3 &= \{ f \in C^2 \mid f'' + af' + bf = 0 \} \end{aligned}$$

hvor a og b er reelle tal. Hvilke af disse mængder vil være underrum i C^1 ?

3. Fastlæg samtlige reelle 2×2 -matricer B , der vil kommutere med matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(dvs $AB = BA$). Vis, at mængden af sådanne matricer B vil være et underrum i $M_{2,2}$, og bestem underrummets dimension.

4. Idet P_2 er rummet af alle reelle polynomier af højst anden grad betragtes de fire polynomier

$$\begin{aligned} p_0(t) &= 2t^2 + t, & p_1(t) &= t^2 \\ p_2(t) &= t^2 - t - 1, & p_3(t) &= t + 1 \end{aligned}$$

Vis, at disse fire er lineært afhængige, og bestem et lineært uafhængigt sæt af tre af disse polynomier.

Vis endelig, at ethvert element i P_2 kan skrives som line-

arkombination af disse tre polynomier.

5. Man betragter vektorrummet \mathbb{C}^3 over \mathbb{C} . Der er givet følgende sæt af vektorer

$$\begin{aligned} S_1 &= \{ (1, 0, 0); (0, 1, i); (1, i, -1) \} \\ S_2 &= \{ (1, -1, i); (i, 0, 1); (0, 1, i) \} \\ S_3 &= \{ (i, i, i); (1, 1, -1); (1, i, 0) \} \end{aligned}$$

Hvilke af disse mængder er lineært uafhængige, og bestem koordinaterne til vektoren $(1, 2i, -3)$ med hensyn til S_2 .

6. Vis, at hvert af følgende sæt af polynomier i P_3 (rummet af alle reelle polynomier af grad ≤ 3) vil udgøre en basis for P_3 .

$$\begin{aligned} &\{ 1, 1 + t, t + t^2, t^2 + t^3 \} \\ &\{ 1, 1 + t, 1 + t^2, 1 + t^3 \} \end{aligned}$$

og fastlæg koordinaterne til polynomiet $p(t) = t^3 - t^2$ i forhold til hver af baserne.

7. Betragt vektorrummet \mathbb{C}^3 over \mathbb{R} . Hvilken dimension har dette vektorrum?
8. Angiv for hver værdi af det reelle tal a mængden af løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x &+ z + aw = 1 \\ x + y + z &= 1 \\ y + z - w &= 1 \\ x + y &- w = 1 \end{aligned}$$

9. Bestem det reelle tal b således, at ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 1 \\ y + z + w &= 0 \\ -x + y - 4z + 5w &= b + 4 \\ 2x - 2y + 5z + bw &= 1 \end{aligned}$$

har mindst en løsning, og fastlæg for hvert sådant b samt-

lige løsninger til systemet.

10. Angiv en basis for løsningsrummet for ligningssystemet

$$\begin{array}{rcl} x + 2y - 3z & = & 0 \\ 4x + 8y - 12z & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} -x - 2y + 3z & = & 0 \\ x - y + 5z & = & 0, \end{array}$$

og bestem de talsæt $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ for hvilke ligningssystemet

$$\begin{array}{rcl} x + 2y - 3z & = & b_1 \\ 4x + 8y - 12z & = & b_3 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} -x - 2y + 3z & = & b_2 \\ x - y + 5z & = & b_4 \end{array}$$

har mindst én løsning.

11. Bestem det reelle tal b således at ligningssystemet

$$\begin{array}{rcl} 4x - 5y - 2z + 3w & = & 3 \\ 3x - 2y - 5z + 4w & = & 4 \\ 2x - 5y + 4z - w & = & b \end{array}$$

har mindst én løsning. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet med dette valg af b .

12. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = & 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 & = & 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 2x_5 & = & 3. \end{array}$$

13. Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

og bestem løsningsmængden til ligningssystemet $Ax = 0$.

Fastlæg derpå vektoren b , således at ligningssystemet $Ax = b$ har mindst én løsning.

14. Angiv for alle talpar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ antallet af løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned}x - y + z - 2w &= -1 \\x + 2z - w &= 2 \\y + z + 2w &= a \\-x + y - z + bw &= 1\end{aligned}$$

og løs derpå ligningssystemet for $(a,b) = (3,2)$.

15. Når $M_{3,3}$ er rummet af alle reelle 3×3 -matricer, defineres en lineær afbildning $f: M_{3,3} \rightarrow M_{3,3}$ ved, at $f(X) = M \cdot X$, idet matricen M er fastlagt ved

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestem nulrum og billedrum for afbildningen f .

16. Idet P_3 er rummet af alle reelle polynomier af højst tredje grad, defineres operatorerne $Q_1, Q_2: P_3 \rightarrow P_3$ ved

$$\begin{aligned}Q_1 p(t) &= t^2 p''(t) - 2tp'(t) + 2p(t) \\Q_2 p(t) &= t^2 p''(t) - 2tp'(t) + 3p(t)\end{aligned}$$

for alle reelle t . Bestem nulrum og billedrum for begge operatorer.

17. Lad de lineære afbildninger $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ og $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i en passende valgt basis være givet ved matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at $B(f) = N(g)$, og fastlæg på denne baggrund $B(gf)$.

18. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

og bestem en basis for $B(f)$, $N(f)$ samt for $B(f) \cap N(f)$, og benyt dette til at bestemme en basis for $B(f^2)$.

19. En lineær afbildning $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

og bestem en basis for såvel $B(g)$ som for $N(g)$. Godtgør, at $B(g) = N(g)$, og bestem på denne baggrund $B(g^2)$.

20. Lad U og V betegne henholdsvis nulrum og billedrum for en lineær afbildning $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Angiv en basis for hvert af rummene U , V og $U \cap V$. Fastlæg på denne baggrund en basis for billedrummet for g^2 .

21. De lineære afbildninger $f, g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er i en passende valgt basis givet ved matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 7 & 5 & -10 \\ -3 & -5 & -6 & 8 \\ -3 & -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vis, at $B(f) = N(g)$ og at $B(g) \cap N(f) = \{0\}$, og bestem $B(gf)$ og $B(fg)$.

22. Lad U og V være nulrum og billedrum for den lineære af-

bildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, der er fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Angiv en parameterfremstilling for hvert af rummene U , V og $U \cap V$, og fastlæg endelig billedrummet for afbildningen f^2 .

23. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er i standardbasen fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestem en basis for såvel nulrummet - $N(f)$ - som billedrummet - $B(f)$ - for denne afbildning.

Bestem tillige en basis for $N(f) \cap B(f)$ samt en basis for billedrummet svarende til afbildningen f^2 .

24. Den lineære afbildning $g: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ har med hensyn til standardbasen matricen

$$A = \begin{pmatrix} c & 4 & 2-2i \\ i & 0 & 2 \\ 3i & 2i & 6+i \end{pmatrix}$$

hvor $c \in \mathbb{C}$.

- a) Vis, at A er invertibel for $c \neq 1$.
- b) Bestem for ethvert c nulrummet $N(g)$ og billedrummet $B(g)$ for afbildning g .
- c) Vis, at $N(g) \cap B(g) = \{0\}$, og bestem billedrummet $B(g^2)$ for afbildningen g^2 .
25. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, er de fire differentialoperatører $L_1, L_2, L_3, L_4: C^\infty \rightarrow C^\infty$ givet ved

$$\begin{aligned}L_1 f &= f'' - 2f' - 3f \\L_2 f &= f'' - 2f' + f \\L_3 f &= f'' - 2f' + 5f \\L_4 f &= f' + f\end{aligned}$$

Bestem en basis for hvert af nulrummene $N(L_1)$, $N(L_2)$ og $N(L_3)$. Fastlæg dernæst en basis for hvert af nulrummene $N(L_2 \circ L_2)$ og $N(L_4 \circ L_1)$.

26. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ er for alle tal $a, b \in \mathbb{R}$ givet ved

$$Lf = f'' + af' + bf.$$

Bestem tallene a og b , når funktionerne

$$\phi_1(t) = e^{-t} \quad \text{og} \quad \phi_2(t) = e^{2t}$$

er basis for nulrummet $N(L)$. Bestem tillige en basis for nulrummet, hvis $a = 7$ og $b = 10$.

27. En lineær afbildning $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er i standardbasen givet ved matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Vis, at de tre vektorer

$$u_1 = (1, -1, 0) \quad , \quad u_2 = (2, -1, -1) \quad , \quad u_3 = (0, 0, -1)$$

kan vælges som basis i \mathbb{R}^3 .

Et element $x \in \mathbb{R}^3$ har i standardbasen et koordinatsæt x_s og i u -basen - $\{u_1, u_2, u_3\}$ et koordinatsæt x_u . Fastlæg koordinatskiftematricen P , således at

$$x_u = Px_s$$

Fastlæg endelig den til g svarende matrix i u -basen.

28. Vis, at vektorerne

$$b_1 = (1, 1, 1) \quad , \quad b_2 = (-1, 0, 1) \quad , \quad b_3 = (2, 1, -1)$$

vil være en basis for \mathbb{R}^3 .

En lineær afbildning $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er i standardbasen $\{e_1, e_2, e_3\}$ givet ved

$$\begin{aligned} g(e_1) &= 2e_2 + e_3 \\ g(e_2) &= e_1 + 3e_3 \\ g(e_3) &= e_1 + e_2. \end{aligned}$$

Opskriv den til g svarende matrix i standardbasen, og fastlæg tillige den til g svarende matrix i forhold til b -basen $\{b_1, b_2, b_3\}$.

29. I \mathbb{R}^4 er der udtrykt i standardbasis givet fire vektorer

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 2, 2, 0) & v_2 &= (1, 0, 0, -1) \\ v_3 &= (0, 2, -2, 0) & v_4 &= (1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Vis, at $v = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ kan vælges som basis for \mathbb{R}^4 .

En lineær afbildning $G: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er i denne v -basis fastlagt ved

$$\begin{aligned} G(v_1) &= -2v_1 & G(v_3) &= 4v_3 \\ G(v_2) &= -2v_2 + v_1 & G(v_4) &= 4v_4 + v_3 \end{aligned}$$

Opskriv den til G svarende matrix i v -basen, og find dernæst den til G svarende matrix i standardbasen.

30. Fastlæg det reelle tal a , således at matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & a \end{pmatrix}$$

vil have egenværdien -1 .

31. Lad $A_{s,t}$ betegne matricen

$$\begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Bestem tallene s og t , når vektoren $(1,1,1)$ er egenvektor for matricen $A_{s,t}$, find derpå samtlige egenværdier for matricen. Er det muligt at bestemme en basis for \mathbb{R}^3 af egenvektorer for matricen?

32. Bestem samtlige egenværdier til matricen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og bestem de tilhørende egenvektorer. Kan man fastlægge en basis af egenvektorer for B ?

33. Der er givet en lineær afbildning $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ved

$$Lf = (D^2 + 4D + D^0)f.$$

Vis, at funktionen $\phi(t) = te^{-2t}$ tilhører egenrummet svarende til egenværdien -3 , og bestem derpå en basis for dette rum.

34. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ er givet ved

$$Lf = (D^3 - 3D - 2D^0)f.$$

Fastlæg en basis for nulrummet $N(L)$ samt en basis for egenrummet svarende til -4 .

35. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ er givet ved

$$Lf = (D^4 + 2D^2 + D^0)f.$$

Vis, at det tilhørende polynomium vil have rødderne i og $-i$

med multiplicitet 2, og fastlæg derpå en basis for nulrummet - $N(L)$ - af reelle funktioner.

36. Idet C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres en operator $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ved

$$Lf = (D^3 + aD + bD^0)f$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Bestem a og b således at funktionen

$$\alpha: t \rightarrow te^{-2t}$$

er egenfunktion for L svarende til egenværdien 8, og fastlæg endelig en basis for egenrummet for L svarende til egenværdien 8.

37. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. Vis, at funktionen

$$\alpha: t \rightarrow t \cos t$$

tilhører nulrummet for operatoren $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ givet ved

$$Lf = (D^4 + 2D^2 + D^0)f,$$

og fastlæg herefter en basis for nulrummet. Fastlæg tillige en basis for egenrummet svarende til egenværdien 1.

38. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle reelle talpar (a, b) en lineære operator $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ved

$$Lf = (D^3 + aD + bD^0)f.$$

Fastlæg talparret (a, b) , således at funktionen

$$\beta: t \rightarrow e^{-t} \cos 2t$$

tilhører nulrummet for L , og bestem derpå en basis for nulrummet, samt en basis for egenrummet svarende til egenværdien -10.

39. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres en lineær operator $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ved

$$Lg = (D^3 - 3D + 2D^0)g.$$

Fastlæg en basis for nulrummet for L . Da funktionen

$$\alpha: t \rightarrow te^{-t}$$

tilhører et egenrum for L , bestem så den tilhørende egen-værdi samt en basis for egenrummet.

40. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle $a, b \in \mathbb{R}$ en operator $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ved

$$Lf = (D^2 + aD + bD^0)f.$$

Bestem tallene a og b , således at funktionen

$$\beta: t \rightarrow te^{-t}$$

er egenfunktion for L svarende til egenværdien -4 , og fastlæg derpå en basis for nulrummet for $L - N(L)$.

En anden operator $M: C^\infty \rightarrow C^\infty$ er defineret ved

$$Mf = (D + 3D^0)f$$

Bestem endelig en basis for nulrummet svarende til den sammensatte operator $M \circ L$.

41. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. En lineær differentialoperator L på dette rum er givet ved

$$L = D^2 - 2D + D^0.$$

Bestem en basis for nulrummet $-N(L)$, samt en basis for egenrummet for L svarende til egenværdien -4 .

Bestem endelig en basis for egenrummet for operatoren $L \circ L$ svarende til egenværdien 16.

42. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. På dette rum er givet en fjerde ordens lineær differentialoperator L , ved

$$L = D^4 + a_3 D^3 + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 D^0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Om denne operator L oplyses, at

a) funktionen $\alpha: t \rightarrow t$ tilhører egenrummet for L svarende til egenværdien $4/3$, og

b) funktionen $\beta: t \rightarrow te^t$ tilhører nulrummet for L .

Fastlæg på denne baggrund differentialoperatoren L .

43. P_3 er rummet af alle reelle polynomier af højst tredje grad. På dette rum defineres for alle heltallige værdier af n en lineær operator L_n ved

$$L_n p(t) = (1 - t^2)p''(t) - 2tp'(t) + np(t).$$

Bestem de til L_n svarende egenværdier og egenpolynomier, og fastlæg de værdier af n , for hvilke L_n vil være invertibel.

Bestem endelig for $n = 6$ og for $n = 8$ - om muligt - et polynomium p , der opfylder ligningen

$$L_n p(t) = 5t^3 + 3t^2.$$

[Vink: Man kan med fordel benytte en til L_n svarende matrixrepræsentation].

44. Idet C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle reelle tal a og b den lineære operator $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ved

$$L = (D^2 + aD + bD^0) \circ D.$$

Funktionerne $f: t \rightarrow te^{-t}$ og $g: t \rightarrow e^{-2t}$ er egenfunktioner

for L . Bestem den tilhørende egenværdi samt konstanterne a og b .

Fastlæg endelig en basis (af reelle funktioner) svarende til nulrummet for $L - N(L)$.

45. Med C^∞ betegnes vektorrummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineret på \mathbb{R} . For alle reelle tal a og b defineres en operator $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ved

$$L = D^3 + aD^2 + 5D + bD^0.$$

Det oplyses, at funktionen ϕ givet ved $\phi(t) = te^{-t}$ tilhører nulrummet $N(L)$.

- a) Vis, at $a = 4$ og $b = 2$.
- b) Bestem for $a = 4$ og $b = 2$ en basis for egenrummet for L hørende til egenværdien 2 .

46. Bestem det reelle tal s således, at matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & s & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

har egenværdien -1 . Bestem i dette tilfælde alle egenværdier og egenvektorer. Kan matricen diagonaliseres?

47. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fastlæg en basis for \mathbb{R}^4 , som består udelukkende af egenvektorer for f .

48. Vis, at matricen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kun vil have én egen værdi og én egenvektor, og bestem derpå en basis for \mathbb{R}^3 , så B vil blive transformeret over i en jordanmatrix.

49. Vis, at matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

kun vil have én egen værdi med to lineært uafhængige egenvektorer, og bestem derpå en basis for \mathbb{R}^3 , så B vil blive transformeret over i en jordanmatrix.

50. En lineær afbildning $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} -11 & 1 & 2 \\ 4 & -11 & -4 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Vis, at g kun vil have én egen værdi, samt at den til g svarende matrix ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg derpå en basis for \mathbb{R}^3 , så den til g svarende matrix i denne basis vil være en jordanmatrix, og opskriv endelig denne jordanmatrix.

51. De to matricer V og U er givet ved

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bevis, at $U = V + V^2 + V^3$, $U^4 = V^4 = 0$
og $UV = VU = U - V$.

Sætter vi $A_t = E + tV$ og $B_t = E + tU$

vis da, at $B_1^{-1} = A_{-1}$.

Vis endelig, at det for alle reelle $t \neq 0$ gælder, at A_t er Jordans normalform for B_t , og bestem en matrix S_t , så

$$B_t = S_t A_t S_t^{-1}.$$

52. Den lineære afbildning $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at afbildningen F vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda + 2)^2$$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres, og fastlæg endelig en basis i \mathbb{R}^4 , således at den til F svarende matrix i denne basis vil være på Jordans normalform.

53. Vis, at matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 4)^2,$$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres, og foretag et basisskifte, så matricen vil transformere til en jordanmatrix.

54. Den lineære afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er givet ved matricen

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -5 & -6 \\ 6 & -7 & -5 & -6 \\ -11 & 10 & 8 & 11 \\ 11 & -10 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

- a) Vis, at \mathbf{A} har det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 2)^2.$$

- b) Vis, at \mathbf{A} ikke kan diagonaliseres.

- c) Bestem en basis for \mathbb{R}^4 , så matricen for f med hensyn til denne basis er på Jordans normalform.

55. Bestem den løsning til det lineære differentialligningssystem

$$\begin{aligned}f_1' &= 2f_1 + f_2 - f_3 \\f_2' &= f_1 + f_2 - f_3 \\f_3' &= f_1 + f_2\end{aligned}$$

som opfylder, at $\mathbf{f}(0) = (3, 2, 1)$.

56. Bestem den løsning til det lineære differentialligningssystem

$$\begin{aligned}g_1' &= -11g_1 + g_2 + 2g_3 \\g_2' &= 4g_1 - 11g_2 - 4g_3 \\g_3' &= -4g_1 + 2g_2 - 5g_3\end{aligned}$$

som opfylder, at $\mathbf{g}(0) = (1, 2, -1)$.

57. Bestem samtlige egenverdier for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg derpå en basis for \mathbb{R}^3 således, at den til \mathbf{A} svarende matrix i denne basis vil være en jordanmatrix, og benyt fx det ovenfor viste til at bestemme den løsning til det lineære differentialligningssystem

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t), \quad \text{hvor} \quad \mathbf{f}(0) = (0, 1, 2)^T.$$

58. Der er givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vis, at \mathbf{A} ikke kan diagonaliseres.

Vis dernæst, at \mathbf{A} ved et passende basisskifte kan bringes på jordans normalform.

Benyt fx dette til at løse differentialligningssystemet

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t), \quad \text{med } \mathbf{f}(0) = (1, 1, 1, 1).$$

59. Vis, at matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\mu) = (\mu + 4)(\mu + 2)^3,$$

og vis tillige, at egenrummet svarende til egenværdien -2 vil have dimension 2.

Foretag derpå et basisskifte, således at matricen \mathbf{A} vil transformere til en jordanmatrix, og benyt fx dette til at bestemme løsningen til differentialligningssystemet

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t), \quad \text{hvor } \mathbf{f}(0) = (0, 1, 2, 0).$$

60. Vis, at matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 1)^3$$

og vis endvidere, at matricen A ikke kan diagonaliseres.

Foretag derpå et basisskifte, således at matricen A transformeres til en jordanmatrix, og benyt fx dette til at vise, at samtlige løsninger til differentiaalligningssystemet

$$f'(t) = Af(t) \quad \text{vil konvergere mod } 0 \text{ for } t \rightarrow \infty.$$

61. Bestem samtlige egenverdier inden for \mathbb{C} for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og vis, at A kan diagonaliseres inden for \mathbb{C} , og benyt fx dette til at bestemme den reelle løsning til differentiaalligningssystemet

$$f'(t) = Af(t), \quad f(0) = (1, -1, 1, 0).$$

62. Bestem samtlige egenverdier for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og vis, at matricen A ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg derpå en basis i \mathbb{R}^4 således, at den til A svarende matrix i denne basis vil være på jordans normalform.

Benyt fx dette til at bestemme den løsning til det lineære differentiaalligningssystem

$$f'(t) = Af(t) \quad \text{med} \quad f(0) = (1, 2, 0, -1).$$

63. Lad A være matricen givet ved

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

og lad f og g være de lineære afbildninger svarende til henholdsvis A og A^T .

Bestem ortogonale baser for nulrummet for f - $N(f)$ - og for billedrummet for g - $B(g)$. Vis, at disse to baser udgør en ortogonal basis for \mathbb{R}^5 .

64. Lad B betegne matricen

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

hvor (a,b,c) er et sæt af komplekse tal, hvorom det gælder, at $(1,1,1)$ er en egenvektor for B . Find samtlige egenverdier for B .

Afgør hvornår B er regulær, og vis, at nulrummet i modsat fald har dimension 1.

Begrund, at enhver basis bestående af egenvektorer vil være ortogonal, hvis a , b og c er reelle tal.

65. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Bestem en ortogonal basis for både billedrummet - $B(f)$ - og nulrummet - $N(f)$ - for denne afbildning.

Vis, at disse baser tilsammen vil udgøre en ortogonal basis for \mathbb{R}^4 , og fastlæg endelig en basis for billedrummet svarende til afbildningen f^2 .

66. I \mathbb{R}^5 er de to underrum U og V givet ved

$$\begin{aligned} U &= \text{Sp}\{(1, 0, 1, 0, -2); (2, 0, 0, 1, -3); (p, 1, 0, 0, -4)\} \\ V &= \text{Sp}\{(-1, 3, 1, 2, 0); (-3, 1, -1, 0, q)\} \end{aligned}$$

Fastlæg konstanterne p og q , således at $U \perp V$. De her fundne værdier af p og q anvendes i det følgende, og bestem derpå en ortogonal basis for såvel U som V .

Fastlæg endelig en mulig matrix for en lineær afbildning $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$, hvor $V = B(F)$ - billedrummet for F - og en matrix for en lineær afbildning $G: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, hvor $U = N(G)$ - nulrummet for G .

67. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er i en passende valgt basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

\mathbb{R}^4 er i det følgende forsynet med det sædvanlige indre produkt. Vis da, at $N(f) \perp B(f)$ - dvs at nulrum og billedrum for f vil være ortogonale.

Fastlæg derpå en ortogonal basis for såvel $N(f)$ som $B(f)$, og vis at disse baser tilsammen vil være en ortogonal basis for \mathbb{R}^4 .

Fastlæg tilslut en ortogonal basis for $B(f^2)$ - billedrummet for afbildningen $f \circ f$.

68. Rummet \mathbb{R}^4 tænkes forsynet med standardbasen. I \mathbb{R}^4 er givet underrummene

$$\begin{aligned} U &= \text{Sp}\{(1, 2, -1, 1); (3, 1, 0, 2)\} \\ V &= \text{Sp}\{(1, 1, 1, -2); (3, 0, 2, -1)\} \end{aligned}$$

Vis, at $\dim(U \cap V) = 1$, og fastlæg en basis for $U \cap V$. Fastlæg dernæst en ortogonal basis $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ i \mathbb{R}^4 , således at $b_1, b_2 \in U$ og $b_3, b_4 \in V$.

Om en lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ vides, at

$$N(f) = U \quad \text{og} \quad B(f) = V$$

Fastlæg på denne baggrund en mulig matrixrepræsentation for

f i B -basen, og bestem endelig med den valgte matrix en basis for $B(f^2)$.

69. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er i standardbasen givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -5/2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestem en basis for nulrummet $N(f)$ og billedrummet $B(f)$, og vis at $\dim(N(f) \cap B(f)) = 1$.

Fastlæg dernæst ortogonale baser for såvel $N(f)$ som $B(f)$, (benyt fx at $\dim(N(f) \cap B(f)) = 1$), og fremstil endelig en ortogonal basis for hele \mathbb{R}^4 , som indeholder ortogonale baser for $N(f)$ og $B(f)$.

70. $P_3[-1,1]$ er vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 3. grad givet på intervallet $[-1,1]$. På dette rum defineres det indre produkt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

Fastlæg en ortogonal basis for underrummet

$$Q = \{ p \in P_3 \mid p(1) = 0 \wedge p(-1) = 0 \}.$$

Beskriv dernæst de polynomier, der tilhører Q^\perp (det ortogonale komplement til Q) og vis, at polynomierne

$$\alpha(t) = 5t^2 - 1, \quad \beta(t) = 7t^3 - 3t$$

er en ortogonal basis for Q^\perp .

De ortogonale baser i Q og Q^\perp vælges nu som basis for P_3 . Bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 + 3.$$

71. $P_2[-1,1]$ er vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 2. grad givet på intervallet $[-1,1]$. På dette rum defineres det indre produkt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

Med Q betegnes det underrum, der udspringes af polynomierne

$$\alpha(t) = t + 1, \quad \beta(t) = t^2 - t.$$

Vis, at $\{\alpha, \beta\}$ er en ortogonal basis for Q .

Bestem derpå en basis for det ortogonale komplement til Q - kaldet Q^\perp .

Man vælger nu disse baser for Q og Q^\perp som basis for hele P_2 , og bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 - 3.$$

72. Med $P_2[-1,1]$ betegnes vektorrummet af alle reelle polynomier af højst 2. grad, defineret på intervallet $[-1,1]$. Rummet $P_2[-1,1]$ forsynes med det sædvanlige indre produkt givet ved

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

Polynomierne p_1 , p_2 og p_3 defineres ved

$$p_1(t) = 2t-1, \quad p_2(t) = t^2+3, \quad p_3(t) = 5t^2-8t-7.$$

- Vis, at $\{p_1, p_2, p_3\}$ er en basis for $P_2[-1,1]$.
- Bestem koordinaterne for polynomiet $p(t) = 3t^2-2t-3$ med hensyn til basen $\{p_1, p_2, p_3\}$.
- Lad U være underrummet $U = \text{Sp}\{p_3\}$ af $P_2[-1,1]$. Bestem en basis for underrummet

$$V = \{ q \in P_2[-1;1] \mid q(\frac{1}{2}) = 0 \},$$

og vis, at $V = U^\perp$, dvs at V er det ortogonale komplement til U .

- Bestem endelig ortogonalprojektion af p_2 på U^\perp .

Opgave A1.

Lad U og W betegne endelig-dimensionale underrum af et reelt underrum V og lad u_1, \dots, u_k og w_1, \dots, w_m betegne baser i henholdsvis U og W . Betragt delmængden L af det reelle talrum \mathbb{R}^{k+m} givet ved

$$L = \{(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{k+m} \mid a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = b_1 w_1 + \dots + b_m w_m\}$$

og lad afbildningen $T: \mathbb{R}^{k+m} \rightarrow V$ være defineret ved

$$T(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m) = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k \quad \text{for } (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{k+m}$$

- a) Vis, at L er et underrum af \mathbb{R}^{k+m} .
- b) Vis, at T er en lineær afbildning.
- c) Vis, at T afbilder L bijektivt på $U \cap W$.
- d) Vis, at hvis x_1, \dots, x_n er en basis for L , da er $T(x_1), \dots, T(x_n)$ en basis for $U \cap W$.
- e) Betragt de lineære afbildninger $L_A, L_B: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ givet ved matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 5 \\ 7 & 0 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Bestem baserne for billedrummene $R(L_A)$ og $R(L_B)$ samt for deres fællesmængde $R(L_A) \cap R(L_B)$.

Opgave A2.

Betragt for ethvert $a \in \mathbb{R}$ matricen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ a & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Idet a repræsenteres på formen $a = 2c^2 - 6$, hvor $c \in \mathbb{C}$, skal det vises, at A har det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4 + 2c)(\lambda - 4 - 2c).$$

Angiv de værdier af a , hvor $p(\lambda)$ faktoriserer helt over \mathbb{R} .

- b) Bestem de værdier af a , for hvilke A er diagonaliserbar.
- c) Bestem for de værdier af a - hvor det er muligt - en ortogonal matrix Q og en diagonalmatrix D , således at $Q^t A Q = D$.
- d) Bestem for enhver ikke-negativ reel værdi af parameteren c en Jordan normalform af A (men ikke en tilhørende Jordan basis).
- e) Bestem for $c = 1$ en invertibel reel matrix Q , således at $J = Q^{-1} A Q$ er en Jordan normalform af A .
- f) Bestem for $c = 1$ de funktioner, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, der er fastlagt ved

$$f'(t) = A f(t) \text{ for alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bestem endvidere den, der tillige opfylder $f(0) = (-1, 6, -5, 0)$.

Opgave A3.

Lad vektorrummet $C([-1, 1])$ af alle kontinuerte funktioner på intervallet $[-1, 1]$ være forsynet med det indre produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

Lad endvidere afbildningen $S: C([-1, 1]) \rightarrow C([-1, 1])$ være defineret ved

$$(Sf)(x) = f(-x) \text{ for alle } f \in C([-1, 1]) \text{ og } x \in [-1, 1]$$

og lad L og U betegne delmængderne af $C([-1, 1])$ givet ved

$$L = \{f \in C([-1, 1]) \mid f(-x) = f(x) \text{ for alle } x \in [-1, 1]\}$$

og

$$U = \{f \in C([-1, 1]) \mid f(-x) = -f(x) \text{ for alle } x \in [-1, 1]\}.$$

- a) Gør rede for, at S er lineær, og bestem S^2 .
- b) Bestem samtlige egenværdier for S , og beskriv de tilhørende egenrum.
- c) Vis, at L og U vil være uendelig-dimensionale underrum af $C([-1, 1])$, og gør rede for, at $L \perp U$ - dvs $\langle f, g \rangle = 0$ for alle $f \in L$ og $g \in U$.
- d) Vis, at $C([-1, 1]) = L \oplus U$ - den direkte sum af L og U .
- e) Vis, at $L^\perp = U$ og $U^\perp = L$.
- f) Vis, at afbildningerne

$$P_1 = (I + S)/2 \quad \text{og} \quad P_2 = (I - S)/2$$

er ortogonale projektioner af $C([-1,1])$ på henholdsvis L og U .

Opgave A4.

Lad $P_n(\mathbb{C})$ betegne det komplekse vektorrum bestående af alle polynomielle funktioner fra \mathbb{R} ind i \mathbb{C} af grad højst n .

Lad $p_0, p_1, \dots, p_n \in P_n(\mathbb{C})$ og betragt funktionen $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ defineret ved

$$w(t) = \det(M(t)) \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R},$$

hvor $M(t)$ betegner $(n+1) \times (n+1)$ matricen givet ved

$$M(t) = \begin{pmatrix} p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \dots & p_n(t) \\ p'_0(t) & p'_1(t) & p'_2(t) & \dots & p'_n(t) \\ p''_0(t) & p''_1(t) & p''_2(t) & \dots & p''_n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^{(n)}_0(t) & p^{(n)}_1(t) & p^{(n)}_2(t) & \dots & p^{(n)}_n(t) \end{pmatrix}$$

Her betegner $p^{(n)}$ den n 'te afledede af polynomiet p .

- Gør rede for, at hvis p_0, p_1, \dots, p_n ikke er en basis for $P_n(\mathbb{C})$, da er $w(t) = 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$.
- Bestem funktionen w i det tilfælde, hvor p_0, p_1, \dots, p_n er lig standardbasen for $P_n(\mathbb{C})$, dvs i tilfældet, hvor $p_k(t) = t^k$ for $k = 0, 1, 2, \dots, n$.
- Sæt $q_k(t) = t^k$ for $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Gør rede for, at der eksisterer en matrix $A \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{C})$, således at

$$\begin{pmatrix} p_0(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q_0(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R}$$

- Vis, at hvis sættet p_0, p_1, \dots, p_n er en basis for $P_n(\mathbb{C})$, så er funktionen w konstant med værdi forskellig fra nul.

Opgave B1.

Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ a & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hvor a er et reelt tal.

- a) Vis, at det karakteristiske polynomium $p(\lambda)$ svarende til A for alle værdier af a er givet ved

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)^3(3 - \lambda).$$

- b) Vis, at A ikke er diagonaliserbar.
c) Bestem for hver værdi af a en til A svarende jordanmatrix J .

I det følgende antages, at $a = -2$.

- d) Bestem en invertibel matrix Q , således at $J = Q^{-1}AQ$.
e) Fastlæg den differentiable funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, der opfylder
 $f'(t) = Af(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$ og $f(0) = (3, -3, -2, 2)$.

Opgave B2.

På $C^\infty(\mathbb{R})$ - rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner - er den lineære afbildning D defineret ved

$$Df = f'$$

Den identiske afbildning benævnes D^0 .

På $C^\infty(\mathbb{R})$ betragtes underrummet

$$V = N((D - D^0)^4)$$

dvs nulrummet for den lineære afbildning $(D - D^0)^4$.

- a) Bestem en basis \mathcal{B} for V .

På V defineres de lineære afbildninger $U, T: V \rightarrow V$ givet ved

$$U = D^2 - D^0 \text{ og } T = D^2 + D^0.$$

- b) Vis, at U ikke vil være injektiv, men at T er injektiv.
- c) Bestem den til T svarende matrix i forhold til den fundne basis β .
- d) Fastlæg en basis γ for V , således at den til T svarende matrix i forhold til denne basis γ vil være en jordanmatrix.

Opgave B3.

Man betragter $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ - rummet af alle $n \times n$ matricer over \mathbb{C} .

En reel matrix M kaldes en **stokastisk matrix** hvis

- $M_{ij} \geq 0$ for alle $i, j = 1, 2, \dots, n$ (dvs alle elementer i M er ikke negative), og
- $M_{1j} + M_{2j} + \dots + M_{nj} = 1$ for alle $j = 1, 2, \dots, n$ (dvs summen af elementerne i hver søjle bliver lig 1).

Lad u være søjlevektoren, hvor alle n elementer er 1, og vis da følgende tre udsagn:

- a) Når M er en reel matrix med ikke negative elementer, da er M en stokastisk matrix hvis og kun hvis $M^t u = u$.
- b) Hvis M og N er stokastiske matricer, da vil også MN og M^p (p er et naturligt tal) være stokastiske matricer.
- c) $\lambda = 1$ vil altid være egenværdi for en stokastisk matrix.

For en matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ defineres en **norm** af A ved

$$\|A\| = \max\{|A_{ij}| : i, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Vis, at normen opfylder følgende fire betingelser

- d1) $\|A\| \geq 0$ og $\|A\| = 0$ hvis og kun hvis $A = O$
- d2) $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$ hvor $c \in \mathbb{C}$
- d3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- d4) $\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$

- e) Er M igen en stokastisk matrix, skal man vise, at $\|M\| \leq 1$ og at $\|M^p\| \leq 1$ for alle naturlige tal p .

Da en reel matrix M kan opfattes som defineret over \mathbb{C} , vil det karakteristiske polynomium for M faktorisere helt, og M vil derfor altid være similar med en jordanmatrix J , dvs der findes en invertibel matrix Q så

$$J = Q^{-1}MQ.$$

- f) Vis da, at $J^p = Q^{-1}M^pQ$, samt at der vil findes et positivt tal c , således at

$$\|J^p\| \leq c \text{ for alle naturlige tal } p.$$

- g) Vis da, at enhver jordanblok i J svarende til egenværdien 1 vil være 1×1 , og
h) at alle egenværdier λ for M (og J) vil opfylde $|\lambda| \leq 1$.

Opgave B4.

Vi betragter $C^\infty([-\pi, \pi])$ - rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner på intervallet $[-\pi, \pi]$.

- a) Er $h \in C^\infty([-\pi, \pi])$ vis da, at

$$\text{hvis } h \text{ er en ulige funktion, er } \int_{-\pi}^{\pi} h(t) dt = 0,$$

På $C^\infty([-\pi, \pi])$ defineres det sædvanlige indre produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

Endvidere betragter vi underrummet

$$M = \text{span}\{ \cos(t), \sin(t), t\cos(t), t\sin(t) \}$$

- b) Undersøg om disse fire funktioner er parvis ortogonale.
c) Bestem en ortogonal basis for det underrum, der er udspændt af de tre første funktioner.
d) Udvid derpå denne ortogonale basis til en ortogonal basis for M .

Vi definerer den lineære afbildning $T: C^\infty([-\pi, \pi]) \rightarrow C^\infty([-\pi, \pi])$ ved

$$T = D^2 + D^0$$

(den samme afbildning som i opgave 2).

- e) Vis, at M vil være et T -invariant underrum i $C^\infty([-\pi, \pi])$.
- f) Vis, at M indeholder to T -cykliske underrum af dimension 2.
- g) Kaldes disse to T -cykliske underrum M_1 og M_2 , vis da at
- $$M_2 \perp M_1 \quad \text{og} \quad M = M_1 \oplus M_2.$$
- h) Bestem endelig den ortogonale projektion af funktionen $h(t) = t$ på hvert af underrummene M_1 og M_2 .

Opgave C1.

Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -1 & 4 \\ -4 & 7 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 20 & 18 & -13 \end{pmatrix}$$

- a) Vis, at det karakteristiske polynomium $p(\lambda)$ svarende til A er givet ved

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)^2(3 + \lambda)^2.$$

- b) Vis, at A ikke er diagonaliserbar.
- c) Bestem en til A svarende jordanmatrix J .
- d) Bestem en invertibel matrix Q , således at $J = Q^{-1}AQ$.
- e) Fastlæg den differentiable funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, der opfylder

$$f'(t) = Af(t) \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad f(0) = (3, -3, -2, 2).$$

Opgave C2.

I det følgende betragtes et endelig-dimensionalt vektorrum V . To lineære afbildninger T og U på V kaldes **samtidigt** diagonaliserbare, hvis der findes en ordnet basis α for V , således at

$$[T]_\alpha \quad \text{og} \quad [U]_\alpha$$

er diagonalmatricer.

- a) Antag nu, at afbildningerne T og U er samtidigt diagonaliserbare, og vis da at

$$UT = TU.$$

I det følgende antages det, at afbildningerne T og U er diagonaliserbare og endvidere at $UT = TU$. (Og vi skal vise, at T og U er samtidigt diagonaliserbare).

- b) Betragt nu et vilkårligt egenrum E_λ for T , og vis, at dette egenrum vil være U -invariant.
- c) Lad W være et U -invariant underrum i V , og lad v_1, v_2, \dots, v_k være egenvektorer for U svarende til **forskellige** egenværdier. Er nu

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k \in W$$

vis da, at $v_i \in W$ for alle $i = 1, 2, \dots, k$. (Det kan med fordel vises ved induktion efter k).

- d) U er som bekendt diagonaliserbar, vis da, at U_W - dvs U 's restriktion til det U -invariante underrum W - også vil være diagonaliserbar. (Benyt fx de karakteristiske polynomier for U og U_W samt resultatet fra punkt c).
- e) Vis nu, at man kan bestemme en basis for E_λ af egenvektorer **for** U , samt at T og U hermed er samtidigt diagonaliserbare.
- f) Der er givet følgende to matricer

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Undersøg om de vil være samtidigt diagonaliserbare. (Hvorfor kan resultatet fra punkt e benyttes i denne sammenhæng?).

Opgave C3.

Rummet \mathbb{R}^4 er forsynet med standardbasen. For ethvert reelt tal p defineres følgende to underrum i \mathbb{R}^4

$$U = \text{span}\{(1,2,-1,p);(3,1,0,2)\}$$

$$V = \text{span}\{(1,1,p,-2);(3,0,2,-1)\}$$

- a) Bestem de tal p for hvilke $\dim(U \cap V) = 1$, og fastlæg i hvert enkelt tilfælde en basis for $U \cap V$.

Rummet \mathbb{R}^4 er endvidere forsynet med det sædvanlige indre produkt. I det følgende benyttes kun én af de fundne værdier for p - vælg selv.

- b) Fastlæg nu en ortogonal basis $b = \{ b_1, b_2, b_3, b_4 \}$ for \mathbb{R}^4 , således at elementerne i basis opfylder

$$b_1, b_2 \in U \quad \text{og} \quad b_2, b_3 \in V.$$

- c) Om en lineær afbildning $S: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ oplyses det, at

$$B(S) = V \quad \text{og} \quad N(S) = U$$

hvor $B(S)$ er billedrummet og $N(S)$ er nulrummet for S . Endvidere oplyses det om afbildningen S , at

$$S(b_3) = -2b_3 \quad \text{og} \quad S(b_4) = b_2 - b_3$$

Fastlæg på denne baggrund en matrixrepræsentation for S i b -basen.

- d) Redegør for at S ikke kan diagonaliseres, og bestem den til S svarende jordanmatrix samt en jordanbasis udtrykt i b -basen.
- e) Fastlæg endvidere en matrixrepræsentation for S i standardbasen. (Benyt fx en ortonormal basis, der svarer til b -basis).
- f) Bestem endelig en basis for billedrummet af S^2 .

Opgave C4.

Betragt vektorrummet $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ - dvs rummet af alle reelle 3×3 matricer.

- a) Vis, at der ved $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$

er defineret et indre produkt på $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. (B^T betegner den transponerede matrix til B).

- b) Betrakt derpå delmængderne

$$S = \{ A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid A^T = A \}$$

og

$$T = \{ A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid A^T = -A \}$$

Vis at S og T er underrum i $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ og at $M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) = S \oplus T$. Hvad er dimensionen af S ?

- c) I rummet S er nu givet de to matricer

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fastlæg da $\langle A, B \rangle$, $\|A\|$ og $\|B\|$.

- d) I rummet S betragter vi $U = \text{span}\{A, B\}$ og U^\perp . Fastlæg de krav som elementerne i U^\perp nødvendigvis skal opfylde. Hvad er dimensionen af U^\perp ?
- e) Fastlæg på denne baggrund en ortogonal basis for U^\perp .
- f) Vis endvidere, at $T = S^\perp$.
- g) Fastlæg endelig fourierkoefficienterne for matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA's hjemmeside: <http://mmf.ruc.dk> eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: imfufa@ruc.dk.

- 332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG
Specialrapport af: Sine Korrenann
Vejleder: Dorte Posselt
- 333/97 Biodiversity Matters
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity
by: Bernd Kuemmel
- 334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen
- 335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids
by: Jeppe C. Dyre
- 336/97 Problem-orientated Group Project Work at Roskilde University
by: Kathrine Legge
- 337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose
- et projekt om matematisk modellering
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen
- 338/97 Kvantisering af nanoleders elektriske ledningsevne
Første modul fysikprojekt
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss,
Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup
Vejleder: Tage Christensen
- 339/97 Defining Discipline
by: Wolfgang Coy
- 340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -
by: Carsten Lunde Petersen
- 341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry
by: Mogens Niss
- 342/97 A global clean fossil scenario DISCUSSION PAPER prepared by Bernd Kuemmel
for the project LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND
AND SUPPLY
- 343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE
AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

- 344/97 Puzzles and Siegel disks
by: Carsten Lunde-Petersen
- 345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator
Ph.D. Thesis
by: Mette Sofie Olufsen
- 346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces
af: Sebastian Horst
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen
- 347/98 Verificering af Matematiske Modeller
- en analyse af Den Danske Eulerske Model
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschläger
Vejleder: Bernhard Booss-Bavnbek
- 348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact
assessment for power plants in Denmark
by: Stefan Krüger Nielsen
project leader: Bent Sørensen
- 349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i
arbejdsmarkedsuddannelserne
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege
- 350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96
- 351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education
by: Mogens Niss
- 352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications
by: Carsten Lunde Petersen
- 353/98 Problemløsning og modellering i en almindelige matematikundervisning
Specialrapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen
- 354/98 A Global Renewable Energy Scenario
by: Bent Sørensen and Peter Meibom
- 355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces
by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

- 356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen
- 357/98 Cayleys Problem
En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K. W.
Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff
Vejleder: Jesper Larsen
- 358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an
Implementation in Cardiovascular Models
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen
-
- 359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply
Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios
by: Bent Sørensen (with contribution from Bernd Kuemmel and Peter Meiborn)
- 360/99 SYMMETRI I FYSIK
En Meta-projektrapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tine Bjarke Bonné
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants
by: Bernhard Booss-Bavnbek, Kenro Furutani
- 362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen
En videnskabsfagsprojekt-rapport af: Martin Niss
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen
- 363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION
by: Donald T. Campbell, Mark H. Bickhard, and Peder V. Christiansen
- 364/99 Illustrationens kraft - Visuel formidling af fysik
Integreret speciale i fysik og kommunikation
af Sebastian Horst
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjærup
- 365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context
by: Tine Wedege
- 366/99 LATEX FOR FORFATTERE - En introduktion til LATEX
og IMFUFA-LATEX
af: Jørgen Larsen

- 367/99 Boundary Reduction of Spectral Invariants and Unique Continuation Property
by: Bernhard Booss-Bavnbek
- 368/99 Kvarterrapport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF
BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM
Projektleder: Bent Sørensen
- 369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob S. Jørgensen
Supervisor: Carsten Lunde Petersen
- 370/99 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999
Eksamensopgaver fra perioden 1976 - 1999. Denne tekst erstatter
tekst nr. 350/98
- 371/99 Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematik
undervisning
Et matematikspeciale af: Maria Hermannsson
Vejleder: Mogens Niss
- 372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering:
Udviklingshistorie og multipel opdagelse
Ph.d.-afhandling af Tine Hoff Kjeldsen
- 373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yoshida-Nicolaescu
Theorem
by: Bernhard Booss-Bavnbek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki
- 374/99 Det hydrauliske spring - Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler
Specialeafhandling af: Anders Marcussen
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard, Bent C. Jørgensen
- 375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-
1914
Historiespeciale af Henrik Andreassen, cand.mag. i Historie og Matematik
- 376/99 Universality of AC conduction in disordered solids
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder
- 377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: A Multiple Discovery?
by: Tine Hoff Kjeldsen
-
- 378/00 Solar energy preprints:
1. Renewable energy sources and thermal energy storage
2. Integration of photovoltaic cells into the global energy system
by: Bent Sørensen

- 379/00
EULERS DIFFERENTIALREGNING
Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne
En tredjeseesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse
af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen
Vejleder: Jørgen Larsen
- 380/00
MATEMATISK MODELLERING AF HJERTEFUNKTIONEN
Isovolumetrisk ventrikulær kontraktion og udpumpning til det kardiovaskulære
system
af: Gitte Andersen (3. moduls-rapport), Jakob Hilmer og Stine Weisbjerg (speciale)
Vejleder: Johnny Ottesen
- 381/00
Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne
- Rekognosceringer og konstruktioner i grænselandet mellem matematikkens didaktik
og forskning i voksenuddannelse
Ph. d.-afhandling af Tine Wedege
- 382/00
Den selvundvigende vandring
Et matematisk professionsprojekt
af: Martin Niss, Arnold Skimminge
Vejledere: Viggo Andreassen, John Villumsen
- 383/00
Beviser i matematik
af: Anne K.S. Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter
Wulff
Vejleder: Mogens Niss
- 384/00
Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model
Ph.D. thesis by: Thomas B. Schrøder
Supervisor: Jeppe C. Dyre
- 385/00
The Geometry of Cauchy Data Spaces
This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)
by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski
- 386/00
Neutrale mandatfordelingsmetoder – en illusion?
af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup
Vejleder: Bernhard Booss-Bavnbek
- 387/00
A History of the Minimax Theorem: von Neumann's Conception of the Minimax
Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts
by: Tine Hoff Kjeldsen
- 388/00
Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel
et 2. moduls matematik modelprojekt
af: Bo Jakobsen, Kristine Niss
Vejleder: Jesper Larsen
- 389/00
University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of
experience with the Roskilde model
By: Mogens Niss
Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for
mathematics!
by: Johnny Ottesen
- 390/01
SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I
DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM Slutrapport, april 2001
Projektleder: Bent Sørensen
Projektdeltagere: DONG: Aksel Hauge Petersen, Celia Juhl, Elkraft System[#]: Thomas
Engberg Pedersen[#], Hans Ravn, Charlotte Søndergren, Energi 2[#]: Peter Simonsen,
RISØ Systemanalyseaf: Kaj Jørgensen[#], Lars Henrik Nielsen, Helge V. Larsen,
Poul Erik Morthorst, Lotte Schleisner. RUC: Finn Sørensen^{**}, Bent Sørensen
[#]Indtil 1/1-2000 Elkraft, [#] fra 1/5-2000 Cowi Consult
^{*}Indtil 15/6-1999 DTU Bygninger & Energi, ^{**} fra 1/1-2001 Polypeptide Labs.
Projekt 1763/99-0001 under Energistyrelsens Brintprogram
- 391/01
Matematisk modelleringskompetence – et undervisningsforløb i gymnasiet
3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boye, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie
Inari Castella, Jan Lauridsen, Maria Göttsche, Ditte Mandee Andreassen
Vejleder: Johnny Ottesen
- 392/01
"PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF
PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT
by: Bent Sørensen.
- 393/01
Hilberts matematikfilosofi
Specialrapport af: Jesper Hasmark Andersen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 394/01
"PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF
PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART II: PHYSICS PROPER
by: Bent Sørensen.
- 395/01
Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege
- 396/01
2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

397/01

En undersøgelse af solvents og kædelængdes betydning for anomal swelling i
phospholipidbællag
2. modul fysikrapport af: Kristine Niss, Arnold Skimminge, Esben Thormann, Stine
Timmermann
Vejleder: Dorte Posselt